FUNZIONI ESPONENZIALI

CONCETTI INTRODUTTIVI

POTENZE AD ESPONENTE RAZIONALE

La teoria delle potenze può essere estesa anche alle potenze che hanno per esponente un NUMERO RAZIONALE (INSIEME Q).

- Hanno senso solo le potenze che hanno una base **a** positiva e diversa da zero $\Rightarrow \; a \in \Re^{+}$
- Poiché i numeri razionali sono frazioni del tipo $\frac{m}{n}$ deve essere $m \in N \quad e \quad n \in N^{*}$ (numeri naturali diversi da zero)
- Quindi hanno significato tutte le potenze aventi per base un numero reale positivo e per esponente un numero razionale qualsiasi

  e si scrive $a^{\frac{m}{n}} \quad a \in \Re^{+}\ ,\ m \in N\ ,\ n \in N^{*}$
- Ricordiamo alcune definizioni fondamentali:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^{0} = 1 \\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^{n}} \\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}} \\ a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}} \end{array}}$$

N.B.: non ha senso parlare di potenza di un numero negativo perché si hanno in alcuni casi delle ambiguità, ad esempio:

$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2 \qquad mentre \quad (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^{2}} = \sqrt[6]{64} = +2$ quindi pur essendo gli esponenti equivalenti le potenze nei due casi danno un risultato diverso.

I NUMERI REALI

INSIEMI NUMERICI NOTI

N<Z<Q
NUMERI NATURALI<NUMERI INTERI<NUMERI RAZIONALI

Q E' L' INSIEME DEI NUMERI DECIMALI LIMITATI PERIODICI E NON, *CHE POSSONO ESSERE TRASFORMATI IN UNA FRAZIONE*

INSIEME DEI NUMERI IRRAZIONALI = INSIEME DEI NUMERI ALGEBRICI E TRASCENDENTI

I E' L' INSIEME DEI NUMERI DECIMALI ILLIMITATI NON PERIODICI CHE NON, *CHE POSSONO ESSERE TRASFORMATI IN UNA FRAZIONE*

Radici quadrate, Cubiche, Pigreco, il numero di Nepero, logaritmi in base dieci e logaritmi naturali.

$\sqrt{2}$ =1,41421356………

$\sqrt{3}$ =1,73205080………

e=2,718281…….

π =3,14159265358……….

Log2=0,301029995663981…..

log2=0,693147180559945……

Questi numeri completano la retta reale

$\sqrt{2}$ =1,41421356

$1<\sqrt{2}<2$
$1,4<\sqrt{2}<1,5$
$1,41<\sqrt{2}<1,42$
$1,414<\sqrt{2}<1,415$
$1,4142<\sqrt{2}<1,4143$

Quindi possiamo costruire una coppia di classi contigue di numeri razionali

$H_{difetto}=\{$ 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1, 4142; ……… $\}$
$H_{eccesso}=\{$ 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1, 4143; ……… $\}$

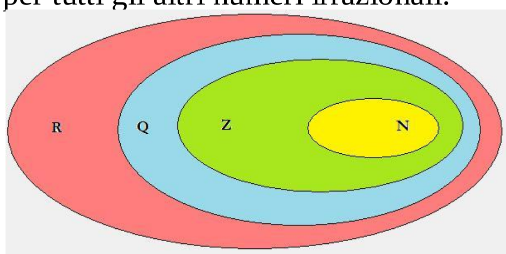
le quali sono:

- separate, ogni elemento di H_1 è minore di quelli di H_2

- H_1 e H_2 sono **<u>indefinitamente</u>** ravvicinate, che significa che l'errore che si commette considerando l'approssimazione di $\sqrt{2}$ può essere reso piccolo a piacere.

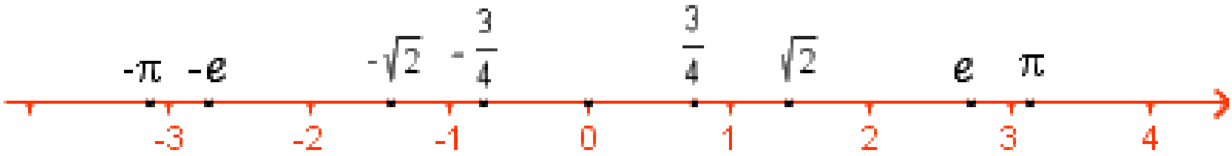
$\sqrt{2}$ è detto **ELEMENTO SEPARATORE** TRA H_1 E H_2, e può essere quindi rappresentato sulla retta reale.

Ragionamenti analoghi possono essere fatti per tutti gli altri numeri irrazionali.



L'insieme dei numeri $I \cup Q=R$

RETTA REALE



POTENZE AD ESPONENTE IRRAZIONALE E POTENZE AD ESPONENTE REALE

La teoria delle potenze può essere estesa anche alle potenze che hanno per esponente un NUMERO IRRAZIONALE (ad esempio $\sqrt{3}$ che non si può esprimere con una frazione) se tale potenza la consideriamo come l'UNICO elemento separatore tra due insiemi (dette CLASSI) di potenze ad esponente razionale, il primo A_1 costituito da tutti i numeri che lo approssimano per difetto ed il secondo A_2 costituito da quelli che lo approssimano per eccesso. Poiché tali insiemi sono separati e indefinitivamente ravvicinati si può estendere la teoria delle potenze anche alle potenze con esponente reale (insieme di tutti i numeri compresi i numeri irrazionali).

Sia a un numero reale positivo diverso da 1 e sia x un numero reale. Detto b l'elemento separatore delle due classi contigue $A_1 = \{a^r | r \in Q,\ r < x\}$, $A_2 = \{a^r | r \in Q,\ r > x\}$ si definisce potenza di base a ed esponente x ponendo $a^x = b$

- Non si definiscono le potenze a esponente reale di numeri negativi
- Quindi hanno significato tutte le potenze aventi per base un numero reale positivo e per esponente un numero reale qualsiasi
- $1^x=1$

- Proprietà delle potenze ad esponente reale:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2) $a^x : a^y = a^{x-y}$
3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4) $\sqrt[n]{a^x} = (\sqrt[n]{a})^x$
5) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

MONOTONIA DELLE POTENZE

Le potenze di un numero reale maggiore di uno crescono al crescere dell'esponente razionale e quelle di un numero reale positivo minore di uno decrescono al crescere dell'esponente razionale:

se a>1 $\quad a^r<a^s \Leftrightarrow r<s$

se 0<a<1 $\quad a^r<a^s \Leftrightarrow r>s \qquad r, s \in Q$

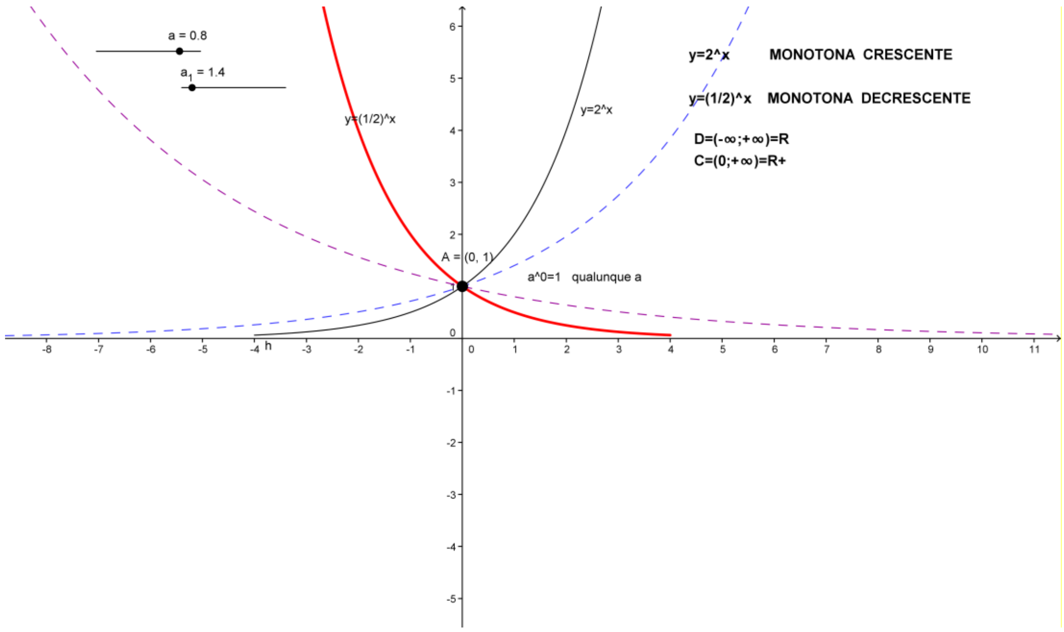
FUNZIONE ESPONENZIALE

<u>Definizione</u>: prefissato un numero reale a>0, si definisce funzione esponenziale quella funzione che associa a un qualsiasi numero reale x il numero reale a^x: $\boxed{f: x \rightarrow a^x}$ $(a, x \in R, a>0)$

PROPRIETA' DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE

se a>1	$x_1<x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$	in tal caso la funzione è monotona crescente
se 0<a<1	$x_1<x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$	in tal caso la funzione è monotona dacrescente

<u>QUINDI LE FUNZIONI ESPONENZIALI SONO BIUNIVOCHE</u>



<u>CLICCA SULL'IMMAGINE</u>

$y = a^x \quad a > 1 \quad \textit{FUNZIONE CRESCENTE}$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

$y = a^x \quad 0 < a < 1 \quad \textit{FUNZIONE DECRESCENTE}$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

L'importanza delle funzioni esponenziale sta nel fatto che il suo andamento rappresenta alcuni fenomeni fisici in cui al variare della variabile indipendente, la variabile dipendente aumenta in modo esponenziale (elevato). Ad esempio sono descritte da funzioni esponenziali il decadimento delle sostanze radioattive oppure la scissione nucleare :

1 neutrone $\rightarrow$ 2 neutroni $\rightarrow$ 4 neutroni $\rightarrow$ 8 neutroni $\rightarrow$ 16 neutroni $\rightarrow$ ....

2^1 2^2 2^3 2^4 2^x

EQUAZIONI ESPONENZIALI

DEF.:Sono equazioni esponenziali le equazioni in cui l'incognita x figura nell'esponente di una potenza.

Poiché la funzione esponenziale è BIUNIVOCA è verificata la seguente proprietà:

se $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ovvero analogamente $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ vero se $a \in R$, $a>0$, $a \neq 1$

Quindi se una equazione esponenziale si può ricondurre alla FORMA CANONICA (e solo in questo caso)
$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ la sua soluzione sarà data dall'equazione equivalente $f(x)=g(x)$

ESEMPIO:

$2^{x+1} = 2^{-x+3} \rightarrow x+1 = -x+3 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

$3^{2-8x} = 9^{3x+1} \rightarrow 3^{2-8x} = 3^{2(3x+1)} \rightarrow 2-8x = 6x+2 \rightarrow x = 0$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

DEF.: Sono disequazioni esponenziali le disequazioni in cui l'incognita x figura nell'esponente di una potenza.

Poiché la funzione esponenziale è monotona crescente o decrescente sono verificate le seguenti proprietà:

se $a>1$ $\quad x_1<x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ in tal caso la funzione è monotona crescente
se $0<a<1$ $\quad x_1<x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ in tal caso la funzione è monotona dacrescente

da tali proprietà, applicate alle disequazioni esponenziali in forma canonica si ha:
se $a>1$ $\quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x)<g(x)$ (non cambia il verso della disequazione)
se $0<a<1$ $\quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x)>g(x)$ (**<u>cambia</u>** il verso della disequazione)

Quindi se una equazione esponenziale si può ricondurre alla FORMA CANONICA
$a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad (o > o \geq ....)$ la sua soluzione sarà data dalla disequazione equivalente riferita agli esponenti.

ESEMPIO:

$2^{x+1} > 2^{-x+3} \rightarrow$ *poichè* $\underline{a>1} \rightarrow x+1 > -x+3 \rightarrow 2x > 2 \rightarrow x > 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3} \rightarrow$ *poichè* $\underline{0<a<1} \rightarrow x+1 < -x+3 \rightarrow 2x < 2 \rightarrow x < 1$